FMI

Model subiect
Concursul de admitere la Facultatea de Matematică şi Informatică
Proba de Matematică

1. [3 puncte] Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+3} - x = 1$ este:
   A. $\{3, 4\}$

   B. $\{1\}$

   C. $\emptyset$

   D. $\{-1, 3\}$

   E. $\{-2, 3\}$

   F. $\{-2, 1\}$.

2. [7 puncte] Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie $x \circ y = xy - 9x - 9y + 90$, $x, y \in \mathbb{R}$. Considerăm mulţimea $G = [8,\, 10]$ şi afirmaţiile:

   (i) G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ faţă de legea "$\circ$";

   (ii) $e = 9$ este element neutru faţă de legea "$\circ$";

   (iii) $(G, \circ)$ este monoid;

   (iv) $(G \setminus \{9\}, \circ)$ este grup comutativ;

   (v) Suma elementelor simetrizabile ale lui G faţă de legea "$\circ$" este egală cu 18.

   Câte din afirmaţiile de mai sus sunt adevărate?
   A. 0

   B. 1

   C. 2

   D. 3

   E. 4

   F. 5

3. [3 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & , \quad x \leq 1 \\ 2x - 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$. Valoarea expresiei $(a + 2023)^b$, unde $a = \int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$, iar $b = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ este egală cu:

A. 1

B. 0

C. 2023

D. 2022

E. $\frac{1}{2023}$

F. $\frac{1}{2022}$

4. [4 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$. Câte din următoarele afirmaţii sunt adevărate:

(i) $f(1) < 0$;

(ii) Funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$;

(iii) Funcţia f este convexă pe intervalul $[1, +\infty)$;

(iv) $x_0 = 1$ este punct de maxim global pentru funcţia f;

(v) Tangenta la graficul funcţie f în punctul de abscisă $x_0 = 1$ este paralelă cu axa Ox.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. 5

5. [3 puncte] Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Considerăm proprietăţile:

(i) Matricea A nu este inversabilă;

(ii) Există A^{-1} şi $A^{-1} = A$;

(iii) Există A^{-1} şi $A^{-1} = A + 2I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(iv) Suma elementelor matricii A^2 este egală cu 0;

(v) $A^3 + 2A^2 = A$.

Una din afirmaţiile de mai jos este adevărată. Care este aceasta?

A. Toate proprietăţile sunt adevărate.

B. Numai proprietăţile (i) şi (v) sunt adevărate.

C. Numai proprietăţile (iii), (iv) şi (v) sunt adevărate.

D. Singura proprietate adevărată este (ii).

E. Toate proprietăţile sunt false.

F. Singurele proprietăţi adevărate sunt (iii) şi (v).

6. [5 puncte] Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \cdot \sin x \, dx$ este:

A. $\frac{1}{16}$

B. 0

C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$

D. $\frac{1}{2023}$

E. $\frac{\sqrt{3}}{8}$

F. $-\frac{1}{16}$

7. [6 puncte] Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} \cdot e^x & , \ x < 0 \\ x^2 + mx + 1 & , \ x \geq 0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$. Dacă $a = \text{card}\big(\mathbb{N} \cap (m, 3m+1]\big)$, iar $b = \int_{-1}^{1} \big(1 + xf'(x)\big)e^{f(x)} dx$, atunci numărul $a + (b - e^2\sqrt{e})^e$ este egal cu:

A. 1

B. $2e$

C. $1 + e$

D. $e^{\sqrt{2}} + 1$

E. $e^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

F. $e^{\sqrt{2}} + 2$

8. [4 puncte] Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $p = X^3 - 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ notăm $s = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ şi $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$. Atunci $s + d$ este egală cu:

A. 0

B. -10

C. 1

D. -5

E. 5

F. 10

9. [4 puncte] Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $p = X^4 - aX^2 + 4X - b \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $x_1 = 1 + i \in \mathbb{C}$ este rădăcină a polinomului p, atunci $a + b + a^b$ este egal cu:

A. -2

B. 6

C. 16

D. 0

E. 3

F. 14

10. [4 puncte] Fie $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-x^2 + 3x - 1)e^{-x}$, $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Tripletul (a, b, c) pentru care funcţia F este o primitivă a funcţiei f este egal cu:
   A. $(2, 1, 0)$

   B. $(1, -1, 0)$

   C. $(-1, 1, 1)$

   D. $(1, 1, 1)$

   E. $(1, 1, 0)$

   F. $(1, 2, 1)$
11. [5 puncte] Fie N numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $2^x = x^2$. Atunci:
   A. $N = 0$

   B. $N = 3$

   C. $N = 6$

   D. $N = 4$

   E. $N = 1$

   F. $N = 2$.
12. [4 puncte] Dacă $\alpha = \log_{15} 5$, atunci expresia lui $\log_{15}(1.8)$ în funcţie de α este:
   A. $2 - 3\alpha$

   B. $3 + 2\alpha$

   C. $3 - 4\alpha$

   D. $2 + 5\alpha$

   E. $3 + 4\alpha$

   F. $1 + 2\alpha$
13. [5 puncte] Fie α o constantă reală. Dacă matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & \alpha & 6 \end{pmatrix}$ are rangul 2, atunci α are valoarea:
   A. -3

   B. -1

   C. 1

   D. 3

   E. nu există valori reale pentru α

   F. $\alpha = 2$

14. [5 puncte] Suma elementelor simetrizabile din monoidul comutativ $(\mathbb{Z}[i], *)$, unde $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, iar

$$(a + bi) * (c + di) = ac + bdi,\ (\forall) a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

   este egală cu:
   A. i

   B. $-i$

   C. 0

   D. 1

   E. -1

   F. $1 + i$

15. [5 puncte] Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x\ln(1+x)}$ este:

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

E. $-\frac{1}{6}$

F. 0

16. [5 puncte] Imaginea funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{\sqrt{x}}$ este:

A. $(-\infty, e]$

B. $\mathbb{R}$

C. $\left(-\infty, \dfrac{2}{\sqrt{e}}\right]$

D. $(0, \infty)$

E. $\left(0, \dfrac{2}{\sqrt{e}}\right]$

F. $\left[\dfrac{2}{\sqrt{e}}, \infty\right)$

17. [5 puncte] Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $3^{4-x} \leq 3^x$ este:

A. $\varnothing$

B. $[2, \infty)$

C. $\{-1, 1\}$

D. $[0, 2]$

E. $[-1, 1]$

F. $(2, \infty)$.

18. [5 puncte] În raport cu un reper cartezian fixat xOy considerăm dreptele $d_1 : 5x - 2y + 1 = 0$, $d_2 : x - y - 1 = 0$, respectiv $d_3 : 4x - y - 1 = 0$. Dacă d_1, d_2 şi d_3 sunt dreptele suport ale laturilor unui triunghi, atunci coordonatele centrului de greutate al acestuia sunt:

A. $(1, 3)$

B. $(-1, 0)$

C. $(-1, 1)$

D. $(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3})$

E. $(1, 0)$

F. $(0, 0)$

19. [5 puncte] Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 4x}\right)$ este:

A. ∞

B. -2

C. 2

D. $-\infty$

E. -4

F. 0.

20. [3 puncte] Pentru $n \in \{1, 2, 3\}$ notăm $l_n = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^n}$. Numărul $(1 + l_1)(1 - l_2)^{12 l_3}$ este egal cu:

A. $\frac{1}{3}$

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

E. 1

F. 0

Numărul total maxim de puncte este: 90